جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخ تستی
مرحله اول
دهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۱

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

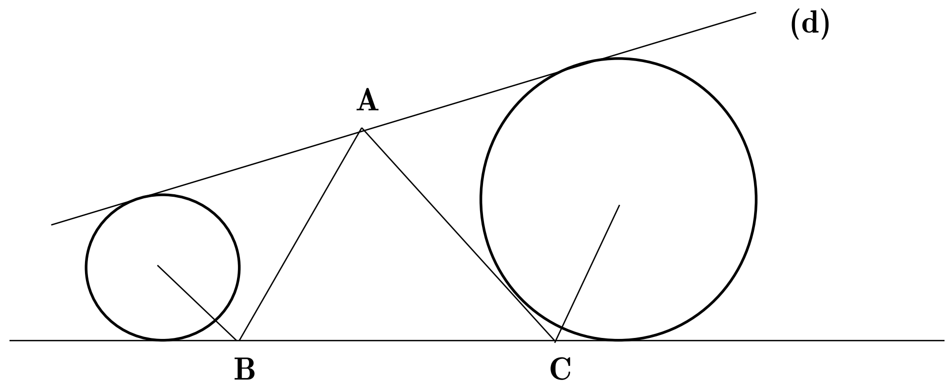
- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول دهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی

۱- همه‌ی جواب‌های درست معادله‌ی $\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{mn^{۲}}=\frac{۳}{۴}$ را به دست آورید.

۲- اگر X یک مجموعه‌ی n عضوی باشد آنگاه ثابت کنید تعداد زوج‌های (A,B) که A و B زیرمجموعه‌های X هستند و A و B زیرمجموعه‌های X هستند و $A \subsetneq B$، برابر است با $۳^{n}-۲^{n}$.

۳- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده‌شده است. از نقطه‌ی A در بیرون مثلث، خطی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دو دایره‌ای باشند که مطابق شکل به ترتیب بر AB، BC و (d) مماسند، آنگاه ثابت کنید که $O_۱B+O_۲C$ مقداری است ثابت.



۴- در معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^{۳}+bx+c=۰$ ضرایب همگی اعداد گویا هستند و می‌دانیم که یکی از ریشه‌های آن با حاصل‌ضرب دو ریشه‌ی دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه، عددی گویاست.

۵- همه‌ی اعداد اول فرد p را پیدا کنید به‌گونه‌ای که

$$\frac{۲^{p-۱}-۱}{p}$$

مربع کامل گردد.

۶- در چهارضلعی گوژ $ABCD$، نقطه‌ی O محل برخورد قطرهاست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم.

اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند آنگاه ثابت کنید که $PQ \geq \frac{AB+CD}{۲}$.

حل مسأله های مرحله‌ی اول دهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، آذرماه ۱۳۷۱

-۱

$$\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{mn^۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴mm\left(\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{mn^۲}\right)=۳mn$$

$$\Rightarrow ۴n+۴m-\frac{۴}{n}=۳mn$$

چون طرفین معادله‌ی فوق باید صحیح باشند، پس $\frac{۴}{n}$ باید عدد صحیحی باشد. پس $n=\{\pm ۱ \text{ یا } \pm ۲ \text{ یا } \pm ۴\}$.

$$n=۱\Rightarrow \frac{۱}{m}+۱-\frac{۱}{m}=\frac{۳}{۴}$$ امکان ندارد

$$n=-۱\Rightarrow \frac{۱}{m}-۱-\frac{۱}{m}=\frac{۳}{۴}$$ امکان ندارد

$$n=۲\Rightarrow \frac{۱}{m}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴m}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow m=۳$$

$$n=-۲\Rightarrow \frac{۱}{m}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴m}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow m=\frac{۱۵}{۸}$$ امکان ندارد

$$n=۴\Rightarrow \frac{۱}{m}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶m}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow m=\frac{۱۵}{۸}$$ امکان ندارد

$$n=-۴\Rightarrow \frac{۱}{m}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶m}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow m=\frac{۱۵}{۱۶}$$ امکان ندارد

پس تنها جواب مسأله هنگامی است که $n=۲$ و $m=۳$ باشد.

-۲ حالتی را در نظر می‌گیریم که مجموعه‌ی B، i عضوی باشد. در این حالت تعداد حالات مختلف انتخاب B برابر است با $\binom{n}{i}$ و تعداد حالات مختلف انتخاب A برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های محض B یعنی $۲^i-۱$. پس تعداد حالات مختلف انتخاب زوج مرتب (A,B) برابر است با $\binom{n}{i}(۲^i-۱)$. B می‌تواند ۰، ۱، ... و یا m عضوی باشد. پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}(۲^i-۱)=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}۲^i-\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}$$

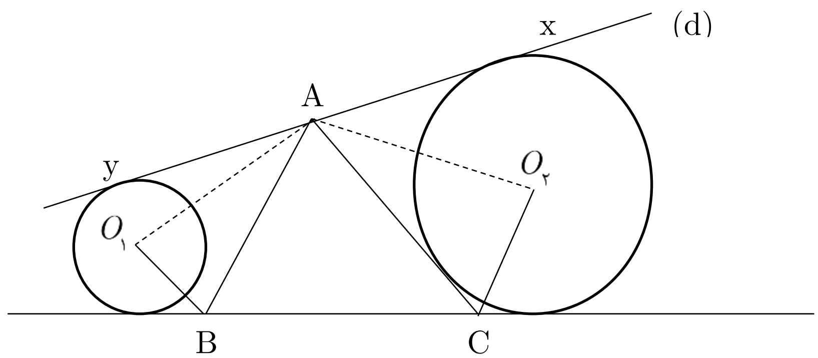
و بنابر بسط دوجمله‌ای خیام می‌دانیم که

$$۳^n=(۲+۱)^n=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}۲^i,\qquad ۲^n=(۱+۱)^n=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}$$

پس تعداد کل حالات برابر است با

$$\text{تعداد کل حالات} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i - \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 3^n - 2^n$$

-۳



نقطه‌ی M را روی BC به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\angle BAM = \angle O_1AB$ باشد. در این صورت

$$\angle O_2AC = \frac{1}{2}\angle CAx = \frac{1}{2}(120^\circ - \angle BAy) = 60^\circ - \angle O_1AB$$

$$\angle MAC = 60^\circ - \angle BAM$$

بنابراین $\angle O_2AC = \angle MAC$ است.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta O_1AB = \Delta ABM \Rightarrow O_1B = BM \\ \Delta O_2AC = \Delta ACM \Rightarrow O_2C = MC\end{array}\right\} \Rightarrow O_1B + O_2C = BM + CM = BC$$

پس مجموع $O_1B + O_2C$ برابر با طول ضلع مثلث AB است.

-۴ فرض می‌کنیم که ریشه‌های این معادله برابر با x_1، x_2 و x_3 باشند و داشته باشیم $x_1 = x_2x_3$.

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = -\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{b}{a} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

پس

$$x_1x_2x_3 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \times x_1 = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x_1^2 = -\frac{c}{a} \qquad (1)$$

$$x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۳x_۱=\frac{b}{a}\Rightarrow x_۱x_۲+x_۱+x_۳x_۱=\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_۱\ \ ۱+x_۳\ \ =\frac{b}{a}$$

از طرفی

$$x_۱+x_۲+x_۳=۰\Rightarrow x_۲+x_۳=-x_۱$$

$$\Rightarrow x_۱\ \ ۱-x_۱\ \ =\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_۱-x_۱^۲=-\frac{c}{a} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲)\ \Rightarrow x_۱\ \ -\left(-\frac{c}{a}\right)=\frac{b}{a}\Rightarrow x_۱\ \ =\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$$

چون a و b و c اعدادی گویا هستند، $x_۱$ هم گویا می‌شود.

۵-

$$۲^{p-۱}-۱=pk^۲$$

چون p فرد است، پس می‌توان نوشت $p=۲m+۱$. بنابراین،

$$۲^{۲m}-۱=pk^۲\Rightarrow(۲^m-۱)(۲^m+۱)=pk^۲$$

$۲^m-۱$ و $۲^m+۱$ دو عدد فرد متوالی هستند. بنابراین نسبت به هم اول‌اند و چون حاصل‌ضرب آن‌ها برابر با $pk^۲$ است، پس یکی از آن‌ها باید به‌صورت مجذور کامل و دیگری باید به‌صورت حاصل‌ضرب p در یک مجذور کامل باشد یعنی دو حالت زیر پیش می‌آید.

$$\begin{cases}۲^m-۱=x^۲,۲^m+۱=py^۲\\ ۲^m-۱=px^۲,۲^m+۱=y^۲\end{cases}$$

در حالت اول چون $۲^m-۱$ عددی فرد است، پس x باید فرد باشد. یعنی $x=۲n+۱$. پس

$$۲^m-۱=(۲n+۱)^۲=۴n^۲+۴n+۱$$

$$\Rightarrow ۲^m=۴n^۲+۴n+۲=۲(۲n^۲+۲n+۱)$$

$$\Rightarrow ۲^{m-۱}=۲(n^۲+n)+۱$$

طرف راست این عبارت فرد است؛ بنابراین طرف چپ هم باید فرد باشد، ولی تنها توانی از ۲ که عددی فرد است $۱=۲^۰$ است. پس باید $m-۱=۰$ باشد درنتیجه، $m=۱$ و $p=۳$. در حالت دوم هم به‌طور مشابه می‌توانیم بگوییم که y عددی فرد است پس می‌توانیم بنویسیم $y=۲n+۱$. پس

$$۲^m+۱=y^۲=(۲n+۱)^۲=۴n^۲+۴n+۱$$

$$\Rightarrow ۲^m=۴(n^۲+n)$$

$$\Rightarrow ۲^{m-۲}=n(n+۱)$$

یکی از دو عدد n و $n+۱$ فرد است؛ ولی می‌دانیم که $۲^{m-۲}$ هیچ عامل فردی جز ۱ ندارد؛ پس باید $n=۱$ باشد. پس

$$n=۱\Rightarrow ۲^{m-۲}=۲\Rightarrow m=۳\Rightarrow p=۷$$

پس تنها جواب‌های مسأله عبارت‌اند از ۳ و ۷

۶- از P و Q دو عمود بر BD رسم می‌کنیم و پای عمودها را H و H' می‌نامیم. می‌توان گفت

$$PQ\geq HH'=OH+OH'=\frac{۱}{۲}OD+\frac{۱}{۲}OB \qquad (۱)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$PQ\geq\frac{۱}{۲}OA+\frac{۱}{۲}OC \qquad (۲)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم.

$$۲PQ\geq\frac{۱}{۲}(OA+OB+OC+OD)$$

ولی در مثلث‌های OAB و OCD می‌دانیم که $OA+OB\geq AB$ و $OC+OD\geq CD$.

بنابراین،

$$۲PQ\geq\frac{۱}{۲}(AB+CD)\Rightarrow PQ\geq\frac{۱}{۴}(AB+CD)$$